

**SEMINARIO DI ANALISI MATEMATICA  
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA  
DELL'UNIVERSITA' DI BOLOGNA  
Anno Accademico 2001-2002**

***Mauro Fabrizio***

**ENERGIE LIBERE IN VISCOELASTICITÀ E APPLICAZIONI  
ALLE EQUAZIONI ALE DERIVATE PARZIALI**

**12 marzo 2002**

**Tecnoprint - Bologna 2003**

# Energie libere in viscoelasticità e applicazioni alle equazioni alle derivate parziali.\*

Mauro Fabrizio<sup>†</sup>

## 1 Introduzione

Nei materiali con fading memory, lo stato è dato dalla storia. In questo lavoro mostreremo come sia più naturale definire lo stato mediante la risposta fornita dallo stress quando è sottoposto ad un processo di deformazione costante. Inoltre metteremo in evidenza il significato e l'importanza di determinare una norma naturale nello spazio dei processi e degli stati per un materiale con fading memory. A tal fine mostreremo come l'idea considerata da Gentili in [12], di introdurre una topologia nello spazio dei processi attraverso la continuità del lavoro, fornisca una topologia naturale nello spazio degli stati, che Gentili dimostra essere duale rispetto a quella dei processi. Questo punto di vista sembra particolarmente utile nello studio dei PDEs connesse a tali problemi. Per questa ragione l'articolo finisce con un'applicazione alle equazioni integro-differenziali della viscoelasticità. Per tale problema, grazie a questi nuovi spazi e senza alcuna ipotesi sul valore del coefficiente  $G'(0)$  e sulla regolarità del nucleo  $G''(s)$ , possiamo provare l'esistenza, l'unicità e il decadimento asintotico delle soluzioni.

## 2 Fading memory e termodinamica

Un materiale viscoelastico è definito da una equazione costitutiva che lega il tensore dello stress  $T$  al gradiente di deformazione  $F$  mediante un funzionale del tipo

$$T(x, t) = \hat{T}(F^t(x)),$$

dove  $F^t(x, s) = F(x, t - s)$  è la storia del gradiente di deformazione  $F$ . Nel caso lineare abbiamo

$$T(x, t) = G_0(x)E(x, t) + \int_0^\infty G'(x, s)E^t(x, s) ds,$$

\* Questa ricerca è stata realizzata con il contributo del GNFM (INDAM) e in parte sostenuta dal MIUR (Cofin 2002) attraverso il progetto di ricerca "Mathematical models for materials science" e dall'Università di Bologna - Fondi per progetti pluriennali.

<sup>†</sup> Università di Bologna, Dipartimento di Matematica, Piazza di Porta S. Donato, 5, 40126 Bologna, Italia, e-mail [fabrizio@dm.unibo.it](mailto:fabrizio@dm.unibo.it)

dove  $E = \frac{\nabla u + (\nabla u)^T}{2}$  è il tensore di deformazione. Inoltre,  $G_0(x)$  e  $-G'(x, s)$  sono tensori simmetrici e definiti positivi, così

$$G_\infty(x) := G_0(x) + \int_0^\infty G'(x, s) ds.$$

Naturalmente, questo studio può essere applicato all'equazione costitutiva non lineare del tipo

$$T(x, t) = G_0(x) \Phi(F(x, t)) + \int_0^\infty G'(x, s) \Phi(F^t(x, s)) ds, \quad (1)$$

dove  $\Phi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  è una funzione dispari rispetto ad  $F$ , non lineare e regolare.

Una applicazione  $P : [0, d_p) \rightarrow \text{Lin}$  continua a tratti e definita come:

$$P(t) = \dot{E}(t), \quad t \in [0, d_p)$$

è chiamata *processo cinetico* di durata  $d_p \in \mathbb{R}^+$ .

**Definizione 1** Un materiale semplice è dato dall'insieme  $(\Pi, \Sigma, \hat{p}, \hat{T})$ :

**a -**  $\Pi$  è l'insieme dei processi cinetici definito come:  $\Pi = \{P : [0, d_p) \rightarrow \text{Lin} \text{ continui a tratti}; \text{ se } P_1, P_2 \in \Pi, \text{ allora } P_1 * P_2 \in \Pi, \text{ dove}$

$$P_1 * P_2(t) = \begin{cases} P_1(t), & \text{se } t \in [0, d_{p_1}) \\ P_2(d_{p_1} - t), & \text{se } t \in [d_{p_1}, d_{p_1} + d_{p_2}) \end{cases},$$

inoltre, se  $P \in \Pi$ , allora  $P|_{[t_1, t_2)} \in \Pi, [t_1, t_2) \subset [0, d_p)\}$

**b -**  $\Sigma$  è lo spazio degli stati, i suoi elementi sono indicati con  $\sigma$ ,

**c -** la applicazione  $\hat{p} : \Sigma \times \Pi \rightarrow \Sigma$  è chiamata funzione di evoluzione, tale che se  $\sigma^i$  è lo stato iniziale e  $P$  è un processo:  $\hat{p}(\sigma^i, P) = \sigma^f$ ,

**d -** la applicazione  $\hat{T} : \Sigma \times \Pi \rightarrow \Gamma$  è la funzione risposta che, ad ogni stato  $\sigma$  e ad ogni processo  $P$ , assegna il processo del tensore stress  $T^P$  su tutto l'intervallo temporale  $[0, d_p)$ . Cioè

$$T^P(t) = \hat{T}(\sigma, P)(t), \quad t \in [0, d_p).$$

**Definizione 2** Il sistema è chiamato causale, se la proprietà d della Definizione 1 si può sostituire con la nuova condizione

**d' -** la applicazione  $\hat{T} : \Sigma \times \text{Lin} \rightarrow \text{Sym}$  è tale che

$$T(t) = \hat{T}(\sigma(t), P(t)).$$

**Osservazione 1** In questo articolo consideriamo solo sistemi causali, per i quali, poichè  $\sigma(t) = \hat{\rho}(\sigma, P_t)$ , la funzione  $\tilde{T}$  è legata a  $\hat{T}$  dalla relazione

$$\hat{T}(\hat{\rho}(\sigma, P_t), P(t)) = \tilde{T}(\sigma, P)(t)$$

Un materiale viscoelastico è un materiale semplice dove lo stato è dato dalla storia  $\sigma = (E^t) = (E(t), E_r^t)$  e il processo da

$$P(t) = \dot{E}(t), \quad t \in [0, d_p).$$

In seguito consideriamo il lavoro  $W$  del processo  $P$ , definito come

$$W(\sigma, P) = \int_0^{d_p} \hat{T}(\sigma(t), P(t)) \cdot L(t) dt.$$

**Definizione 3 (Noll, 72)** Due strain storie  $E_1^t, E_2^t$  si dicono equivalenti se per ogni processo  $\dot{E}^P : [0, d_P) \rightarrow \text{Sym}$ , soddisfano

$$\hat{T}(E_1^t, \dot{E}^P) = \hat{T}(E_2^t, \dot{E}^P),$$

o analogamente, come provato da Gentili, [12], due storie si dicono equivalenti se per ogni processo  $\dot{E}^P : [0, d_P) \rightarrow \text{Sym}$  abbiamo

$$W(E_1^t, \dot{E}^P) = W(E_2^t, \dot{E}^P).$$

**Teorema 1 (Del Piero, Deseri, 96, 97)** Nel caso lineare, due storie  $E_1^t, E_2^t$  sono equivalenti se e solo se  $E_1(t) = E_2(t)$  e

$$\int_0^\infty G'(s + \tau) E_1^t(s) ds = \int_0^\infty G'(s + \tau) E_2^t(s) ds, \quad \forall \tau \geq 0. \quad (2)$$

Secondo la definizione di stato, due coppie  $(E_1(t), E_1^t(\tau))$  e  $(E_2(t), E_2^t(\tau))$  equivalenti (nel senso di Noll) sono rappresentate dallo stesso stato  $\sigma(t)$  (vedere [14]). In altre parole lo stato può essere rappresentato dalla coppia

$$\sigma(t) = (E(t), \tilde{I}^t(\tau)) = I^t(\tau),$$

dove

$$\tilde{I}^t(\tau) = - \int_0^\infty G'(s + \tau) E^t(s) ds.$$

**Definizione 4 (Gentili, 02)** Un processo  $\dot{E}^P : [0, \infty) \rightarrow \text{Sym}$  è detto processo a lavoro finito se

$$W(0^\dagger, \dot{E}^P) = \int_0^{d_P} T(0^\dagger, \dot{E}_{[0, \tau)}^P) \cdot \dot{E}^P(\tau) d\tau < \infty.$$

Inoltre, il lavoro  $W(0^\dagger, \dot{E}^P)$  nel caso lineare si può scrivere nella forma

$$\begin{aligned} W(0^\dagger, \dot{E}^P) &= \frac{1}{2} G_\infty E(d_P) \cdot E(d_P) \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_0^\infty \int_0^\infty \check{G}(|\tau - s|) \dot{E}^P(\tau) \cdot \dot{E}^P(s) d\tau ds \\ &= \frac{1}{2} G_\infty E(d_P) \cdot E(d_P) + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \check{G}_c(\omega) \dot{E}_+^P(\omega) \cdot \overline{\dot{E}_+^P(\omega)} d\omega, \end{aligned} \quad (3)$$

dove  $\check{G} = G(s) - G_\infty$ ,  $\check{G}_c$  e  $\dot{E}_+^P$  sono le trasformate di Fourier di  $\check{G}$  e di  $\dot{E}^P$ .

L'insieme dei processi a lavoro finito è dato da

$$\mathcal{H}_G = \left\{ \dot{E}^P; \int_0^\infty \int_0^\infty \check{G}(|\tau - s|) \dot{E}^P(\tau) \cdot \dot{E}^P(s) d\tau ds < \infty \right\}. \quad (4)$$

Questo insieme è uno spazio di Hilbert se il kernel  $\check{G}$  soddisfa la Seconda Legge della Termodinamica (i.e.  $\check{G}_c(\omega) > 0$ ) e la norma è data da

$$\begin{aligned} \|\dot{E}^P\|^2 &= \int_0^\infty \int_0^\infty \check{G}(|\tau - s|) \dot{E}^P(\tau) \cdot \dot{E}^P(s) d\tau ds \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^\infty \check{G}_c(\omega) \dot{E}_+^P(\omega) \cdot \overline{\dot{E}_+^P(\omega)} d\omega. \end{aligned}$$

Il dominio di definizione degli stati ammissibili è l'insieme di tutte le storie di deformazione che rendono il lavoro ben definito quando il processo appartiene a  $\mathcal{H}_G$ .

$$\begin{aligned} W(I^t, \dot{E}^P) &= \frac{1}{2} G_\infty E(d_P) \cdot E(d_P) + \frac{1}{2} \int_0^\infty \int_0^\infty \check{G}(|\tau - s|) \dot{E}^P(\tau) \cdot \dot{E}^P(s) d\tau ds \\ &\quad + G_\infty^{-1} I^t(0) \cdot E(d_P) - \int_0^\infty \tilde{I}^t(\tau) \cdot \dot{E}^P(s) d\tau < \infty. \end{aligned} \quad (5)$$

Quindi l'insieme degli stati ammissibili  $\tilde{I}^t(\cdot, E^t)$  è dato dal duale  $\mathcal{H}'_G$  di  $\mathcal{H}_G$ , cioè

$$\begin{aligned} \mathcal{H}'_G &= \left\{ \tilde{I}^t(\tau); \int_0^\infty \tilde{I}^t(\tau) \cdot \dot{E}^P(s) d\tau < \infty, \forall \dot{E}^P \in \mathcal{H}_G \right\} \\ &= \left\{ \tilde{I}^t(\tau); \int_0^\infty \int_0^\infty G^*(|\tau - \tau'|) \tilde{I}^t(\tau) \cdot \tilde{I}^t(\tau') d\tau d\tau' < \infty \right\}, \end{aligned}$$

dove  $(G^*)_F = \check{G}_c^{-1}(\omega)$ .

L'insieme  $\mathcal{H}'_G$  è uno spazio di Hilbert se la norma è data da

$$\begin{aligned} \|\tilde{I}^t\| &= \int_0^\infty \int_0^\infty G^*(|\tau - \tau'|) \tilde{I}^t(\tau) \cdot \tilde{I}^t(\tau') d\tau d\tau' \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^\infty \check{G}_c^{-1}(\omega) \tilde{I}_c^t(\omega) \cdot \tilde{I}_c^t(\omega) d\omega \end{aligned}$$



**Definizione 5** Una coppia  $(\sigma, P) \in \Sigma \times \Pi$  è detta ciclo se:

$$\hat{p}(\sigma, P) = \sigma.$$

**Seconda Legge per i processi isotermici.**

Per ogni ciclo  $(\sigma, P) \in \Sigma \times \Pi$  vale la disuguaglianza

$$\oint_0^d T(\sigma(\tau), P(\tau)) \cdot L(\tau) d\tau \geq 0 \quad (6)$$

Per i materiali fading memory, i cicli sono molto rari. Per questa ragione consideriamo una nuova forma della Seconda Legge.

**Forma Forte della Seconda Legge** (per i processi isotermici) [7].

Sia  $\Sigma_\sigma := \{\sigma'; \exists P \in \Pi; \hat{p}(\sigma, P) = \sigma'\}$ . L'insieme dei lavori che si ottiene passando da uno stato  $\sigma$  ad un arbitrario stato  $\sigma' \in \Sigma_\sigma$

$$\mathcal{W}(\sigma) := \{W(\sigma, P); P \in \Pi\}$$

è limitato inferiormente. C'è uno stato  $\sigma_0$ , chiamato stato zero, tale che

$$\inf \mathcal{W}(\sigma_0) = 0.$$

Questa ultima definizione della Seconda Legge soddisfa il Principio di Dissipazione dato da Gurtin & Herrera in [15].

Come mostrato in [10] dalla Seconda Legge della Termodinamica abbiamo

$$G'_s(\omega) = \int_0^\infty G'(s) \sin \omega s ds < 0, \quad \text{per ogni } \omega \in \mathbb{R}^{++} \quad (7)$$

mentre dalla Forma Forte della Seconda Legge, si ha

$$G_\infty > 0. \quad (8)$$

**Definizione 6** Una funzione  $\psi: \mathcal{D}_\psi \rightarrow \mathbb{R}^+$  è chiamata energia libera se

- a - il dominio  $\mathcal{D}_\psi \subset \mathcal{D} = \Sigma$  è tale che per ogni  $\sigma_1 \in \mathcal{D}_\psi$  e  $P \in \Pi$ , lo stato  $\sigma = \hat{p}(\sigma_1, P) \in \mathcal{D}_\psi$ ,
- b -  $\sigma_0 \in \mathcal{D}_\psi$  e  $\psi(\sigma_0) = 0$ ,
- c - per ogni coppia  $\sigma_1, \sigma_2 \in \mathcal{D}_\psi$  e  $P \in \Pi$  tale che  $\hat{p}(\sigma_1, P) = \sigma_2$ :

$$\psi(\sigma_2) - \psi(\sigma_1) \leq W(\sigma_1, P) \quad (9)$$

Nella viscoelasticità lineare, ci sono molte energie libere [2], [4], [11]. La famiglia  $\mathcal{F}$  delle energie libere è un insieme convesso. Questo insieme  $\mathcal{F}$  presenta un minimo e un massimo  $\psi_m, \psi_M$ .

L'energia libera massima è stata considerata in [7]

$$\psi_M(E^t) = \frac{1}{2} G_\infty E(t) \cdot E(t) + \frac{1}{2} \int_0^\infty \int_0^\infty G_{12}(s_1 - s_2) (E^t(s_1) - E(t)) \cdot (E^t(s_2) - E(t)) ds_1 ds_2 \quad (10)$$

$$\text{dove } G_{12}(s_1 - s_2) = \frac{\partial^2}{\partial s_1 \partial s_2} G(|s_1 - s_2|).$$

Se  $G'(s) < 0$  e  $G''(s) \geq 0$ , c'è un'energia libera intermedia, chiamata energia libera di Graffi-Volterra, data da

$$\begin{aligned} \psi_G(E^t) &= \frac{1}{2} G_\infty E(t) \cdot E(t) \\ &\quad - \frac{1}{2} \int_0^\infty G'(s) (E^t(s) - E(t)) \cdot (E^t(s) - E(t)) ds. \end{aligned} \quad (11)$$

L'energia libera minima è stata trovata da Bruer e Onat nel 1964 [1] nella seguente forma

$$\Psi_m(\dot{E}_m) = \frac{1}{2} G_\infty E(t) \cdot E(t) + \frac{1}{2} \int_0^\infty \int_0^\infty \check{G}(|s_1 - s_2|) \dot{E}_m(s_1) \cdot \dot{E}_m(s_2) ds_1 ds_2, \quad (12)$$

dove  $\dot{E}_m$  è il processo ottimale che fornisce il massimo lavoro recuperabile, ma non è un funzionale della storia  $E^t(s)$  o dello stato  $I^t = (E(t), \tilde{I}^t(\tau))$ .

Golden [13] ha dato una rappresentazione dell'energia libera minima in termini di  $\tilde{I}^t(\tau)$  come

$$\Psi_m(\tilde{I}^t) = \frac{1}{2} G_\infty E(t) \cdot E(t) + \frac{1}{2} \int_0^\infty \int_0^\infty H(\tau, \tau') \tilde{I}^t(\tau) \cdot \tilde{I}^t(\tau') d\tau d\tau', \quad (13)$$

dove  $H(\tau, \tau')$  è un opportuno kernel dipendente da  $\check{G}$ .

Introduco infine alcune nuove energie libere scritte come funzioni di  $\tilde{I}^t(\cdot)$ . La prima è data da

$$\begin{aligned} \Psi_1(\tilde{I}^t) &= \frac{1}{2} G_\infty E(t) \cdot E(t) + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty \check{G}^*(|\tau - \tau'|) \tilde{I}^t(|\tau|) \cdot \tilde{I}^t(|\tau'|) d\tau d\tau' \\ &= \frac{1}{2} G_\infty E(t) \cdot E(t) + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^\infty \check{G}_c^{-1}(\omega) \tilde{I}_c^t(\omega) \cdot \tilde{I}_c^t(\omega) d\omega, \end{aligned}$$

dove  $(\check{G}^*)_F = \check{G}_c^{-1} > 0$ . La seconda è

$$\Psi_2(\tilde{I}^t) = \frac{1}{2} G_\infty E(t) \cdot E(t) + \frac{1}{2} \int_0^\infty \dot{G}^{-1}(\tau) \tilde{I}^t(\tau) \cdot \tilde{I}^t(\tau) d\tau,$$

dove  $\dot{G}(s) < 0$ ,  $\ddot{G}(s) \geq 0$ .

### 3 Applicazioni alla viscoelasticità lineare

#### 3.1 Comportamento asintotico

Consideriamo l'equazione alle derivate parziali connessa con un materiale viscoelastico e definita nel dominio  $Q = \Omega \times \mathbb{R}^+$

$$\begin{aligned}\ddot{u}(x, t) &= \nabla \cdot (G_0(x) \nabla u(x, t) + \int_0^\infty G'(x, s) \nabla u^t(x, s) ds) \\ &= \nabla \cdot (G_0(x) \nabla u(x, t) + \int_0^t G'(x, s) \nabla u^t(x, s) ds) + \nabla \cdot \tilde{I}^0(x, t),\end{aligned}\quad (14)$$

dove  $\tilde{I}^0(x, t) = \int_0^\infty G'(x, s+t) \nabla u^{t=0}(x, s) ds$ . Assumiamo inoltre come condizioni iniziali

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad \dot{u}(x, 0) = \dot{u}_0(x); \quad u^{t=0}(x, s) = u^0(x, s), \quad s \in \mathbb{R}^+ \quad (15)$$

e come condizioni al contorno

$$u|_{\partial\Omega} = 0, \quad (16)$$

Per ottenere una definizione rigorosa della soluzione debole nell'intervallo temporale  $\mathbb{R}^+$ , dobbiamo introdurre lo spazio di funzioni

$$\begin{aligned}\mathcal{G}(\mathbb{R}^+, V(\Omega)) &= \left\{ u \in L_{loc}^2(\mathbb{R}^+, V(\Omega)); \right. \\ &\quad \left. \int_0^\infty \int_0^\infty \langle \tilde{G}(\tau - \tau') u(\tau), u(\tau') \rangle_V d\tau d\tau' < \infty \right\}\end{aligned}$$

e il suo duale  $\mathcal{G}'(\mathbb{R}^+, V(\Omega))$ . Indichiamo poi

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(\mathbb{R}^+, H_0^1(\Omega)) &= \{ u \in \mathcal{G}(\mathbb{R}^+, H_0^1(\Omega)); \dot{u} \in \mathcal{G}(\mathbb{R}^+, L^2(\Omega)) \} \\ \mathcal{L}^*(\mathbb{R}^+, H_0^1(\Omega)) &= \{ u \in \mathcal{G}(\mathbb{R}^+, H_0^1(\Omega)); \dot{u} \in \mathcal{G}'(\mathbb{R}^+, L^2(\Omega)) \}\end{aligned}$$

Ora consideriamo il nuovo spazio  $\hat{\mathcal{L}}(\mathbb{R}, H_0^1(\Omega))$  ottenuto dall'insieme delle trasformate di Fourier  $\hat{u}(\omega)$  per ogni  $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^+, H_0^1(\Omega))$  e indichiamo con  $\hat{\mathcal{L}}'(\mathbb{R}, H_0^1(\Omega))$  il duale di  $\hat{\mathcal{L}}(\mathbb{R}, H_0^1(\Omega))$ . Sicuramente il teorema di Plancherel per le trasformate di Fourier definisce un isomorfismo naturale tra  $\mathcal{L}(\mathbb{R}^+, H_0^1(\Omega))$  e  $\hat{\mathcal{L}}(\mathbb{R}, H_0^1(\Omega))$ .

**Definizione 7** Una funzione  $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^+, H_0^1(\Omega))$  è detta soluzione debole del problema differenziale (14)-(16) con  $u_0 \in H^1(\Omega)$ ,  $\dot{u}_0 \in L^2(\Omega)$ , e  $u^0(x, \cdot)$  tale che  $\tilde{I}^{t=0}(x, \tau) = - \int_0^\infty G'(x, s+\tau) \nabla u^0(x, s) ds \in \mathcal{L}'(\mathbb{R}^+, L^2(\Omega))$ , se  $u(x, 0) = u_0(x)$  quasi ovunque in  $\Omega$  e

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \int_\Omega \dot{u}(x, t) \cdot \dot{\phi}(x, t) - \left\{ G_0 \nabla u(x, t) + \int_0^t G'(s) \nabla u^t(x, s) ds \right\} \cdot \nabla \phi(x, t) dx \\ = - \int_\Omega \dot{u}_0(x) \cdot \phi(x, 0) dx + \int_0^\infty \int_\Omega \tilde{I}^{t=0}(x, \tau) \cdot \nabla \phi(x, \tau) d\tau dx\end{aligned}\quad (17)$$

per ogni  $\phi \in \mathcal{L}^*(\mathbb{R}^+, H_0^1(\Omega))$ .



Se indichiamo con  $a(u, \phi)$  la forma sesquilineare su  $\mathcal{L}(\mathbb{R}^+, H_0^1(\Omega))$

$$a(u, \phi) = \int_0^\infty \int_\Omega \dot{u}(x, t) \cdot \dot{\phi}(x, t) - \left\{ G_0 \nabla u(x, t) + \int_0^t G'(s) \nabla u^t(x, s) ds \right\} \cdot \nabla \phi(x, t) dx$$

per ogni  $\phi \in \mathcal{L}^*(\mathbb{R}^+, H_0^1(\Omega))$  e tale che  $\varphi(x, 0) = 0$ , allora l'equazione (17) si può scrivere come

$$a(u, \phi) = - \int_\Omega \dot{u}_0(x) \cdot \phi(x, 0) dx + \int_0^\infty \int_\Omega \tilde{I}^{t=0}(x, \tau) \cdot \nabla \phi(x, \tau) d\tau dx.$$

Adesso possiamo enunciare il seguente

**Teorema 2** Sotto le ipotesi (7)-(8) per la funzione rilassamento  $G$ , il problema (14)-(16) ammette una ed una sola soluzione debole  $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^+, H_0^1(\Omega))$ .

Con un semplice cambiamento di variabili, è sempre possibile ottenere la condizione iniziale uguale a zero. Quindi, senza perdere in generalità supporremo  $u_0 = 0$ ,  $\dot{u}_0 = 0$ . Indichiamo con  $\hat{a}$  la forma sesquilineare su  $\hat{\mathcal{L}}(\mathbb{R}, H_0^1(\Omega))$

$$\begin{aligned} \hat{a}(\hat{u}, \hat{\varphi}) = & \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \int_\Omega -i\omega \hat{u}(x, \omega) [i\omega \hat{\varphi}(x, \omega)]^* dx d\omega + \\ & + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \int_\Omega \left[ G_0(x) + \hat{G}'(x, \omega) \right] \nabla \hat{u}(x, \omega) \cdot \nabla \hat{\varphi}^*(x, \omega) \omega dx d\omega \end{aligned}$$

per ogni  $\hat{\varphi} \in \hat{\mathcal{L}}(\mathbb{R}, H_0^1(\Omega))$ . Il teorema di Plancherel applicato a (17) dà

$$\hat{a}(\hat{u}, \hat{\varphi}) = - \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \int_\Omega \tilde{I}_c^{t=0}(x, \omega) \cdot \nabla \hat{\varphi}^*(x, \omega) dx d\omega \quad (18)$$

**Lemma 3** Una funzione  $\hat{u} \in \hat{\mathcal{L}}(\mathbb{R}, H_0^1(\Omega))$  è una trasformata di Fourier di una soluzione debole del problema a valori iniziali a contorno (14)-(16) nel senso della Definizione 5 se e solo se vale l'uguaglianza (18) per ogni  $\hat{\varphi} \in \hat{\mathcal{L}}'(\mathbb{R}, H_0^1(\Omega))$ .

Ponendo nella (18),  $\hat{\varphi}(x, \omega) = \varphi_1(x) \varphi_2(\omega)$ , con  $\varphi_1 \in H^1(\Omega)$  e  $\varphi_2 \in L^2(\mathbb{R})$ , dalla scelta arbitraria di  $\varphi_2$  segue che, per quasi tutti  $\omega \in \mathbb{R}$ , vale la seguente identità:

$$\begin{aligned} & \int_\Omega \omega^2 \hat{u}(x, \omega) \hat{\varphi}_1^*(x) dx + \int_\Omega \left[ G_0(x) + \hat{G}'(x, \omega) \right] \nabla \hat{u}(x, \omega) \cdot \nabla \hat{\varphi}_1^*(x) dx \\ = & - \int_\Omega \tilde{I}_c^{t=0}(x, \omega) \cdot \nabla \hat{\varphi}_1^*(x) dx, \end{aligned} \quad (19)$$

per ogni  $\varphi_1 \in H^1(\Omega)$ . Ma l'identità (19) significa che  $\hat{u}(\cdot, \omega)$  è una soluzione generalizzata in  $H^1(\Omega)$  per il problema ellittico

$$\begin{aligned} -\omega^2 \hat{u}(x, \omega) - \nabla \cdot \left\{ \left[ G_0(x) + \hat{G}'(x, \omega) \right] \nabla \hat{u}(x, \omega) \right\} &= \nabla \cdot \tilde{I}_c^{t=0}(x, \omega) \\ \hat{u}(x, \omega) &= 0, \quad x \in \partial\Omega. \end{aligned} \quad (20)$$

Seguendo la dimostrazione del Teorema 3 di [9] possiamo provare

**Lemma 4** Per ogni  $\omega \in \mathbb{R}$  il problema (20) ammette una e una sola soluzione  $\hat{u}(\cdot, \omega) \in H^1(\Omega)$ .

Dalla parte reale di (20) abbiamo

$$\omega^2 |\hat{u}(x, \omega)|^2 \leq K |\nabla \hat{u}(x, \omega)|^2 + \left| \nabla \cdot \tilde{I}_c^{t=0}(x, \omega) \cdot \hat{u}(x, \omega) \right|, \quad (21)$$

dalla parte immaginaria di (20) otteniamo

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \hat{G}_c(x, \omega) |\omega \nabla \hat{u}(x, \omega)|^2 dx &= \int_{\Omega} \omega^{-1} \hat{G}'_s(x, \omega) |\omega \nabla \hat{u}(x, \omega)|^2 dx \\ &\leq C \int_{\Omega} \left| \tilde{I}_c^{t=0}(x, \omega) \cdot \omega \nabla \hat{u}(x, \omega) \right| dx. \end{aligned} \quad (22)$$

Infine, sotto le ipotesi sulle condizioni iniziali, la disuguaglianza (22) e l'equazione (20<sub>1</sub>) in un intorno di  $\omega = 0$  forniscono la disuguaglianza

$$\left\| \hat{G}_c^{\frac{1}{2}}(\omega) (1 + |\omega|) \nabla \hat{u}(\omega) \right\|_{L^2}^2 \leq C \int_{\Omega} \left| \tilde{I}_c^{t=0}(x, \omega) \cdot \omega \nabla \hat{u}(x, \omega) \right| dx < \infty, \quad (23)$$

Per cui da (23) e (21) abbiamo:

$$\left\| \hat{G}_c^{\frac{1}{2}}(\omega) (1 + |\omega|) \nabla \hat{u}(\omega) \right\|_{L^2}^2 + \left\| \hat{G}_c^{\frac{1}{2}}(\omega) (1 + |\omega|) \omega \hat{u}(\omega) \right\|_{L^2}^2 \leq C \left\| \tilde{I}_c^{t=0}(\omega) \right\|_{\mathcal{H}'_G}^2 < \infty,$$

questo comporta che  $\hat{u} \in \hat{\mathcal{L}}(\mathbb{R}, H_0^1(\Omega))$ . Inoltre l'isomorfismo tra  $\mathcal{L}(\mathbb{R}^+, H_0^1(\Omega))$  e  $\hat{\mathcal{L}}(\mathbb{R}, H_0^1(\Omega))$  garantisce che  $\hat{u}$  sia la trasformata di Fourier della soluzione  $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^+, H_0^1(\Omega))$  del problema (14)–(16).

### 3.2 Teoria dei semi-gruppi

Nello studio del sistema differenziale (14) con la teoria dei semi-gruppi, possiamo scrivere il problema (14) nella forma

$$\dot{u}(x, t) = v(x, t) \quad (24)$$

$$\dot{v}(x, t) = \nabla \cdot (G_{\infty} \nabla u(x, t) + \int_0^{\infty} G'(x, s) \nabla u_d^t(x, s) ds) \quad (25)$$

$$\dot{E}_d^t(x, s) = -\frac{d}{ds} E_d^t(x, s) - \dot{E}(x, t) \quad (26)$$

dove  $E_d^t(x, s) = E^t(x, s) - E(x, t)$ . Ora lo stato è dato da  $\chi = (u, v, E_d^t) \in \mathcal{K}$ . Nei lavori [3], [8], [9] lo spazio  $\mathcal{K}$  è un sottoinsieme del dominio  $H_0^1(\Omega \times L^2(\Omega) \times \mathcal{S}_{\psi_G})$  e il teorema sulla stabilità è stato dimostrato con le condizioni iniziali nello spazio  $\mathcal{K}$ .

Quando usiamo la funzione  $\tilde{I}^t(\tau)$ , il sistema (24)–(26) è equivalente al problema

$$\begin{aligned} \dot{u}(x, t) &= v(x, t) \\ \dot{v}(x, t) &= \nabla \cdot (G_{\infty} \nabla u(x, t) + \tilde{I}^t(0)) \\ \tilde{I}^t(x, \tau) &= -\frac{d}{d\tau} \tilde{I}^t(x, \tau) - [G(\tau) E(x, t)] \end{aligned}$$

dove lo stato  $\chi = (u, v, \tilde{I}^t)$ . Adesso possiamo usare l'energia libera  $\psi_2$  come una norma sullo spazio degli stati, in questo modo è facile provare che lo spazio degli stati coincide con il dominio  $H_0^1(\Omega \times L^2(\Omega) \times \mathcal{S}_{\psi_2})$ , dove  $\mathcal{S}_{\psi_2} \supset \mathcal{S}_{\psi_G}$ .

**Teorema 5** *Sotto le ipotesi*

1.  $\hat{G}'_s(\omega) = \int_0^\infty G'(s) \sin \omega s ds < 0, \quad \omega > 0$
2.  $\exists \alpha \in \mathbb{R}^{++}; 0 < -G'(s) \leq \alpha G''(s), s \in \mathbb{R}^+$

ogni soluzione  $(u, v, \tilde{I}^t)$ , con le condizioni iniziali  $\chi_0 \in \mathcal{S}_{\psi_2}$ , è tale che

$$(\|\dot{u}(t)\|_{L^2}^2 + \Psi_2(\nabla u(t))) \leq M e^{-\mu t} (\|\dot{u}(0)\|_{L^2}^2 + \Psi_2(\nabla u(0)))$$

dove  $M$  e  $\mu$  sono delle opportune costanti.

## References

- [1] S. Breuer & E.T. Onat, On recoverable work in linear viscoelasticity. *Z. Angew. Math. Phys.* **15**, 13–21 (1964).
- [2] B.D. Coleman & D.R. Owen, A mathematical foundation for thermodynamics. *Arch. Rational Mech. Anal.* **54**, 1–104 (1974).
- [3] C.M. Dafermos, Asymptotic stability in viscoelasticity. *Arch. Rational Mech. Anal.* **37**, 297–308 (1970).
- [4] W.A. Day, The thermodynamics of materials with memory. *Materials with Memory*, D. Graffi ed., Liguori, Napoli, 1979.
- [5] G. Del Piero & L. Deseri, On the concepts of state and free energy in linear viscoelasticity. *Arch. Rational Mech. Anal.* **138**, 1–35 (1997).
- [6] G. Del Piero & L. Deseri, On the analytic expression of the free energy in linear viscoelasticity. *J. Elasticity* **43**, 247–278 (1996).
- [7] M. Fabrizio, C. Giorgi & A. Morro, Free energies and dissipation properties for systems with memory. *Arch. Rational Mech. Anal.* **125**, 341–373 (1994).
- [8] M. Fabrizio & B. Lazzari, On the existence and the asymptotic stability of solutions for linearly viscoelastic solids. *Arch. Rational Mech. Anal.* **116**, 139–152 (1991).
- [9] M. Fabrizio & B. Lazzari, The domain of dependence inequality and asymptotic stability for a viscoelastic solid, *Non linear oscillations*. **1**, 117–133 (1998).
- [10] M. Fabrizio & A. Morro, Viscoelastic relaxation functions compatible with thermodynamics. *J. Elasticity* **19**, 63–75 (1988).

- [11] M. Fabrizio & A. Morro, *Mathematical Problems in Linear Viscoelasticity*. SIAM, Philadelphia, 1992.
- [12] G. Gentili, Maximum recoverable work, minimum free energy and state space in linear viscoelasticity. *Quart. Appl. Math.* **60**, 153–182 (2002).
- [13] J.M. Golden, Free energies in the frequency domain: the scalar case. *Quart. Appl. Math.* **58**, 127–150 (2000).
- [14] D. Graffi & M. Fabrizio, Sulla nozione di stato per materiali viscoelastici di tipo "rate", *Atti Acc. Lincei Rend. Fis.* (8), **83**, 201–208 (1989).
- [15] M.E. Gurtin & I. Herrera, On dissipation inequalities and linear viscoelasticity. *Quart. Appl. Math.* **23**, 235–245 (1965).
- [16] W. Noll, A new mathematical theory of simple materials. *Arch. Rational Mech. Anal.* **48**, 1–50 (1972).